Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

а) Решите уравнение $25^{x-\frac{3}{2}}-12\cdot 5^{x-2}+7=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(2;\frac{8}{3}\right)$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение: $5\cdot 25^{x-2}-12\cdot 5^{x-2}+7=0$.

Пусть $t=5^{x-2}$, тогда уравнение запишется в виде $5t^2-12t+7=0$, откуда $t=1$ или $t=\frac{7}{5}$.

При $t=1$ получим: $5^{x-2}=1$, откуда $x=2$.

При $t=\frac{7}{5}$ получим: $5^{x-2}=\frac{7}{5}$, откуда $x=\log_5 35$.

б) Корень $x=2$ не принадлежит промежутку $\left(2;\frac{8}{3}\right)$. Поскольку $2<\log_5 7+1=\log_5 35$ и $3\left(\log_5 7+1\right)=\log_5 343+3<\log_5 625+3=7<8$, корень $x=\log_5 35$ принадлежит промежутку $\left(2;\frac{8}{3}\right)$.

Ответ: а) 2; $\log_5 35$; б) $\log_5 35$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2

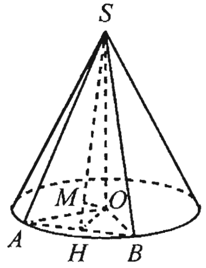
Радиус основания конуса равен 8, а его высота равна 15. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 14. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

Решение.

Сечение конуса плоскостью, содержащей его вершину S и хорду $AB=14$, — треугольник ASB.

В равных прямоугольных треугольниках SOA и SOB, где O — центр основания конуса, $OA=OB=8$, $SO=15$, откуда $SA=SB=\sqrt{OB^2+SO^2}=17$.

Пусть SH — высота и медиана равнобедренного треугольника ASB, $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=4\sqrt{15}$. Тогда отрезок OH — высота и медиана равнобедренного треугольника AOB, $OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{15}$.



Прямые SH и OH перпендикулярны прямой AB, поэтому плоскость SOH перпендикулярна плоскости ASB. Следовательно, расстояние от точки O до плоскости ASB равно высоте OM прямоугольного треугольника SOH, проведённой к гипотенузе: $OM=\frac{OH\cdot SO}{SH}=\frac{15}{4}$.

Ответ: $\frac{15}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{7-2x}(x+6)\le 0,\\ x-\dfrac{x-3}{x+6}-\dfrac{x^2+27x+90}{x^2+8x+12}\le -1.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы: $\log_{7-2x}(x+6)\le 0$.

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<7-2x<1$.

$$\begin{cases}\log_{7-2x}(x+6)\le 0,\\ 0<7-2x<1;\end{cases}\quad \begin{cases}x+6\ge 1,\\ 3<x<\dfrac{7}{2},\end{cases}\ \text{откуда } 3<x<\frac{7}{2}.$$

Второй случай: $7-2x>1$.

$$\begin{cases}\log_{7-2x}(x+6)\le 0,\\ 7-2x>1;\end{cases}\quad \begin{cases}0<x+6\le 1,\\ x<3,\end{cases}\ \text{откуда } -6<x\le -5.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-6<x\le -5$; $3<x<\frac{7}{2}$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x-\frac{x-3}{x+6}-\frac{x^2+27x+90}{x^2+8x+12}\le -1;\ x-\frac{x-3}{x+6}-\frac{19x+78}{(x+6)(x+2)}\le 0;$$

$$\frac{x(x+6)(x+2)-(x+6)(x+12)}{(x+6)(x+2)}\le 0;\ \frac{(x+4)(x-3)}{(x+2)}\le 0,\ \text{где } x\ne -6.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x<-6$; $-6<x\le -4$; $-2<x\le 3$.

3. Решение исходной системы неравенств: $-6<x\le -5$.

Ответ: $(-6;-5]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 В окружности проведены хорды PQ и CD, причём $PQ=PD=CD=12$, $CQ=4$. Найдите CP.

Решение.

Возможны два случая. Первый случай: точки D и Q лежат в разных полуплоскостях относительно прямой CP (рис. 1), тогда $\angle PQC=180°-\angle PDC$.

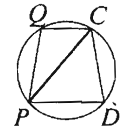


Рис. 1

В треугольниках PQC и PDC

$$PC^2=PQ^2+QC^2-2\cdot PQ\cdot QC\cdot\cos\angle PQC=160+96\cdot\cos\angle PDC;$$

$$PC^2=PD^2+DC^2-2\cdot PD\cdot DC\cdot\cos\angle PDC=288-288\cdot\cos\angle PDC,$$

откуда $\cos\angle PDC=\frac{1}{3}$; $PC=8\sqrt{3}$.

Второй случай: точки D и Q лежат в одной полуплоскости относительно прямой CP (рис. 2), тогда $\angle PQC=\angle PDC$.

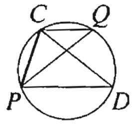


Рис. 2

В треугольниках PQC и PDC

$$PC^2=PQ^2+QC^2-2\cdot PQ\cdot QC\cdot\cos\angle PQC=160-96\cdot\cos\angle PDC;$$

$$PC^2=PD^2+DC^2-2\cdot PD\cdot DC\cdot\cos\angle PDC=288-288\cdot\cos\angle PDC,$$

откуда $\cos\angle PDC=\frac{2}{3}$; $PC=4\sqrt{6}$.

Ответ: $4\sqrt{6}$ или $8\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left|\sin^2 x+2\cos x+a\right|=\sin^2 x+\cos x-a$$

имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ единственный корень.

Решение.

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $\sin^2 x+2\cos x+a\ge 0$. Исходное уравнение примет вид

$$\sin^2 x+2\cos x+a=\sin^2 x+\cos x-a;\ \cos x=-2a.$$

Последнее уравнение имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ единственный корень при $-1\le -2a<0$, откуда $0<a\le\frac{1}{2}$. Подставив $\cos x=-2a$ в неравенство $\sin^2 x+2\cos x+a\ge 0$, получим: $1-4a^2-4a+a\ge 0$, откуда $-1\le a\le\frac{1}{4}$.

В этом случае уравнение $\cos x=-2a$ при условии $\sin^2 x+2\cos x+a\ge 0$ имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ единственный корень $x=\arccos(-2a)$ при $0<a\le\frac{1}{4}$ и не имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ корней при $a\le 0$ и при $a>\frac{1}{4}$.

Второй случай: $\sin^2 x+2\cos x+a<0$. Исходное уравнение примет вид

$$\sin^2 x+2\cos x+a=-\sin^2 x-\cos x+a;\ 2\sin^2 x+3\cos x=0;$$

$$(2\cos x+1)(\cos x-2)=0;\ \cos x=-\frac{1}{2}.$$

Последнее уравнение имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ единственный корень $x=\frac{2\pi}{3}$. Подставив $x=\frac{2\pi}{3}$ в неравенство $\sin^2 x+2\cos x+a<0$, получим: $\frac{3}{4}-2\cdot\frac{1}{2}+a<0$, откуда $a<\frac{1}{4}$.

В этом случае уравнение $2\sin^2 x+3\cos x=0$ при условии $\sin^2 x+2\cos x+a<0$ имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ единственный корень $x=\frac{2\pi}{3}$ при $a<\frac{1}{4}$ и не имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ корней при $a\ge\frac{1}{4}$.

Уравнение $\left|\sin^2 x + 2\cos x + a\right| = \sin^2 x + \cos x - a$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$:

— при $a \le 0$ имеет единственный корень $x = \frac{2\pi}{3}$;

— при $0 < a < \frac{1}{4}$ имеет два различных корня $x = \frac{2\pi}{3}$ и $x = \arccos(-2a)$;

— при $a = \frac{1}{4}$ имеет единственный корень $x = \frac{2\pi}{3}$;

— при $a > \frac{1}{4}$ не имеет корней.

Ответ: $(-\infty; 0]$; $\frac{1}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены оба значения: $a = 0$, $a = \frac{1}{4}$. Ответ отличается от верного исключением точки $a = 0$	3
Обоснованно получены оба значения: $a = 0$, $a = \frac{1}{4}$	2
Верно найдено одно или два из значений $a = 0$ или $a = \frac{1}{4}$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{350}$ равно 1, 2, 3 или 4. Обозначим

$$S_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{350},\ S_2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{350}^2,$$
$$S_3 = a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_{350}^3,\ S_4 = a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_{350}^4.$$

Известно, что $S_1 = 569$.

а) Найдите S_4, если еще известно, что $S_2 = 1307$, $S_3 = 3953$.

б) Может ли $S_4 = 4857$?

в) Пусть $S_4 = 4785$. Найдите все значения, которые может принимать S_2.

Решение.

Пусть количества единиц, двоек, троек и четвёрок среди $a_1, a_2, \ldots, a_{350}$ равны m_1, m_2, m_3, m_4 соответственно. Тогда $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 350$ и $m_1 + 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 = 569$.

а) По условию

$$S_1 = m_1 + 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 = 569,\ S_2 = m_1 + 4m_2 + 9m_3 + 16m_4 = 1307,$$
$$S_3 = m_1 + 8m_2 + 27m_3 + 64m_4 = 3953, \text{ где } m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 350.$$

Решая систему четырёх линейных уравнений с четырьмя неизвестными, находим: $m_1 = 236$, $m_2 = 54$, $m_3 = 15$, $m_4 = 45$. Значит,

$$S_4 = 236 + 16\cdot 54 + 81\cdot 15 + 256\cdot 45 = 13835.$$

б) Если $S_4 = m_1 + 16m_2 + 81m_3 + 256m_4 = 4857$, где $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 350$, то $15m_2 + 80m_3 + 255m_4 = 4507$. В последнем равенстве левая часть кратна 5, а правая — нет, поэтому S_4 не может быть равным 4857.

в) Если $S_4 = m_1 + 16m_2 + 81m_3 + 256m_4 = 4785$, где $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 350$, то $15m_2 + 80m_3 + 255m_4 = 4435$.

Кроме того, поскольку $m_1 + 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 = 569$, получаем:

$$m_2 + 2m_3 + 3m_4 = 219;\ 15m_2 + 30m_3 + 45m_4 = 3285.$$

Вычтем из первого полученного равенства второе: $50m_3 + 210m_4 = 1150$; $5m_3 + 21m_4 = 115$. Значит, m_4 делится на 5 и может равняться только 0 или 5.

При $m_4 = 0$ получаем: $m_3 = \frac{115 - 21m_4}{5} = 23$, $m_2 = 219 - 2m_3 - 3m_4 = 173$, $m_1 = 350 - m_2 - m_3 - m_4 = 154$, $S_2 = m_1 + 4m_2 + 9m_3 + 16m_4 = 1053$.

При $m_4 = 5$ получаем: $m_3 = \frac{115 - 21m_4}{5} = 2$, $m_2 = 219 - 2m_3 - 3m_4 = 200$, $m_1 = 350 - m_2 - m_3 - m_4 = 143$, $S_2 = m_1 + 4m_2 + 9m_3 + 16m_4 = 1041$.

Ответ: а) 13835; б) нет; в) 1041 или 1053.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно выполнены все пункты: *а*, *б* и *в*	4
Верно получен один из следующих результатов: — все из перечисленных в критериях на 1 балл; — обоснованное решение одного из пунктов *а* или *б* и обоснованное решение п. *в*	3
Верно получен один из следующих результатов: — выполнены два из перечисленных в критериях на 1 балл; — обоснованное решение п. *в*	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — получено одно из искомых значений в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4