Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $\sin 2x = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -2\pi]$.

Решение.

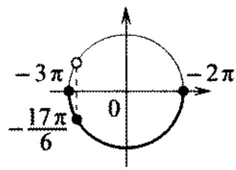
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\sin x\cos x = -\sqrt{3}\sin x;\ \sin x\cdot\left(2\cos x + \sqrt{3}\right) = 0.$$

Значит, либо $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, либо $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -2\pi]$.

Получим числа: -3π; $-\frac{17\pi}{6}$; -2π.



Ответ: а) πk, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) -3π; $-\frac{17\pi}{6}$; -2π.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро $AA_1 = 1$. Точка F принадлежит ребру C_1D_1 и делит его в отношении $2:1$, считая от вершины C_1. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки A, C и F

Решение.

Отрезок EF параллелен диагонали AC (точка E принадлежит ребру A_1D_1), следовательно, искомое сечение — трапеция $ACFE$ (рис. 1). Плоскость сечения пересекает нижнее основание по прямой AC, параллельной A_1C_1, значит, EF параллелен A_1C_1.

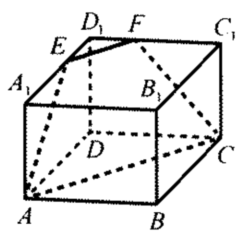


Рис. 1

Треугольники ED_1F и $A_1D_1C_1$ подобны, следовательно, $D_1E : A_1D_1 = D_1F : C_1D_1 = EF : A_1C_1 = 1:3$.

Значит, $AC = A_1C_1 = 6\sqrt{2}$, $EF = 2\sqrt{2}$.

В равных прямоугольных треугольниках CC_1F и AA_1E $CF = AE = \sqrt{AA_1^2 + A_1E^2} = \sqrt{17}$, значит, трапеция $ACFE$ равнобедренная.

Пусть EH — высота трапеции $ACFE$, проведённая к основанию AC (рис. 2), тогда:

$$AH = \frac{AC - EF}{2} = 2\sqrt{2};\ EH = \sqrt{AE^2 - AH^2} = 3;$$

$$S_{ACFE} = \frac{AC + EF}{2} \cdot EH = 12\sqrt{2}.$$

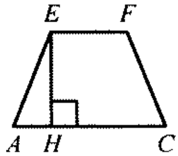


Рис. 2

Ответ: $12\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{6-x} \dfrac{(x-6)^2}{x-2} \geq 2, \\ \dfrac{x^2 - x - 14}{x-4} + \dfrac{x^2 - 8x + 3}{x-8} \leq 2x + 3. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{6-x} \frac{(x-6)^2}{x-2} \geq 2;\ \log_{6-x}(6-x)^2 - \log_{6-x}(x-2) \geq 2;\ \log_{6-x}(x-2) \leq 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 6 - x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{6-x}(x-2) \leq 0, \\ 0 < 6 - x < 1; \end{cases} \begin{cases} x - 2 \geq 1, \\ 5 < x < 6, \end{cases} \text{откуда } 5 < x < 6.$$

Второй случай: $6 - x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{6-x}(x-2) \leq 0, \\ 6 - x > 1; \end{cases} \begin{cases} 0 < x - 2 \leq 1, \\ x < 5, \end{cases} \text{откуда } 2 < x \leq 3.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $2 < x \leq 3$; $5 < x < 6$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\frac{x^2-x-14}{x-4}+\frac{x^2-8x+3}{x-8}\le 2x+3;$$

$$\frac{(x+3)(x-4)}{x-4}-\frac{2}{x-4}+\frac{x(x-8)}{x-8}+\frac{3}{x-8}\le 2x+3;$$

$$-\frac{2}{x-4}+\frac{3}{x-8}\le 0;\ \frac{x+4}{(x-4)(x-8)}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x\le -4$; $4<x<8$.

3. Решение исходной системы неравенств: $5<x<6$.

Ответ: $(5;6)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше .	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 1 и 4 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом в точке C, AO_1 и BO_2 — параллельные радиусы этих окружностей, причём $\angle AO_1O_2=60°$. Найдите AB.

Решение.

Точки O_1, O_2 и C лежат на одной прямой.

Возможны два случая. Первый случай: точки A и B лежат по одну сторону от прямой O_1O_2 (рис. 1). Отрезок AM параллелен отрезку O_1O_2 (точка M принадлежит радиусу BO_2), следовательно, O_1O_2MA — параллелограмм: $AM=O_1O_2=5$, $O_1A=O_2M=1$, $\angle O_2MA=\angle AO_1O_2=60°$

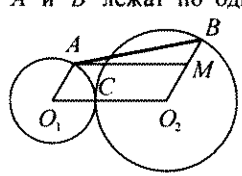


Рис. 1

В треугольнике AMB имеем $MB=3$, $AM=5$, $\angle AMB=120°$, откуда $AB=\sqrt{AM^2+MB^2-2\cdot AM\ \ MB\cdot\cos\angle AMB}=7$.

Второй случай: точки A и B лежат по разные стороны от прямой O_1O_2 (рис. 2). Отрезок AM параллелен отрезку O_1O_2 (точка M лежит на продолжении радиуса BO_2 за точку O_2), следовательно, O_1O_2MA — параллелограмм: $AM = O_1O_2 = 5$, $O_1A = O_2M = 1$, $\angle O_2MA = \angle AO_1O_2 = 60^\circ$

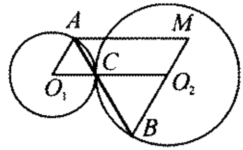


Рис. 2

В треугольнике AMB имеем $MB = 5$, $AM = 5$, $\angle AMB = 60^\circ$, значит, треугольник AMB — правильный, откуда $AB = 5$.

Ответ: 5 или 7.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a+7)^2 = |x - 7 - a| + |x + a + 7|$$

имеет единственный корень.

Решение.

Если x_0 является корнем исходного уравнения, то и $-x_0$ является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень, только если $x_0 = -x_0$, то есть $x_0 = 0$. Подставим значение $x = 0$ в исходное уравнение:

$(a+7)^2 = 2|a+7|$; $|a+7| \cdot (|a+7| - 2) = 0$, откуда либо $|a+7| = 0$; $a = -7$, либо $|a+7| = 2$; $a = -5$ или $a = -9$.

При $a = -7$ исходное уравнение принимает вид: $x^2 = 2|x|$. Корнями этого уравнения являются числа -2; 0 и 2, то есть исходное уравнение имеет более одного корня.

При $a = -5$ и при $a = -9$ уравнение принимает вид: $x^2 + 4 = |x - 2| + |x + 2|$.

При $x < -2$ это уравнение сводится к уравнению $x^2 + 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

б) Рассмотрим различные задуманные числа, среди которых нет нуля. Пусть для этих чисел в наборе на доске оказалось ровно k нулей. Если добавить к задуманным числам нуль, то на доске окажется ровно $2k+1$ нулей: k нулей, получающихся как суммы ненулевых задуманных чисел, k нулей, получающихся как суммы ненулевых задуманных чисел и задуманного нуля, и задуманный нуль. Таким образом, если среди задуманных чисел есть нуль, то в наборе на доске окажется нечётное количество нулей.

Если на доске выписано ровно 2 нуля, то среди задуманных чисел нет нуля. Пусть задумано три или меньше ненулевых числа. Нуль получается тогда, когда сумма некоторого количества положительных чисел равна по модулю сумме некоторого количества отрицательных чисел. Одно задуманное число даёт одну сумму; два различных задуманных числа одного знака дают три различные суммы. Значит, среди сумм положительных и отрицательных чисел совпадают по модулю не более одной. Таким образом, если было задумано не более трёх различных ненулевых чисел, то на доске окажется не более одного нуля.

Если были задуманы числа -3; 1; 2; 3, то на доске окажется ровно два нуля. Значит, наименьшее количество задуманных чисел — 4.

в) Нет, не всегда. Например, для задуманных чисел -3, 1, 2 и -2, -1, 3 на доске будет выписан один и тот же набор -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.

Ответ: а) -5, -3, 4; б) 4; в) нет.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — оценка количества задуманных чисел в п. *а*; — пример в п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованное решение п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

При $-2 \le x \le 2$ получаем уравнение $x^2 = 0$, которое имеет единственный корень.

При $x > 2$ получаем уравнение $x^2 - 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

При $a = -5$ и при $a = -9$ исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: -9; -5.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены оба значения a, но в ответ включено не более одного постороннего значения a	3
Обоснованно получено одно из значений a	2
Получен один из следующих результатов: — задача верно сведена к исследованию квадратных уравнений, полученных после раскрытия модулей; — есть утверждение о симметрии корней исходного уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор -8, -5, -4, -3, -1, 1, 4. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 2 раза. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Решение.

а) Если было задумано 4 числа или более, то на доске должно быть записано не менее 15 чисел. Если было задумано 2 числа или меньше, то на доске должно быть записано не более 3 чисел. Значит, было задумано 3 числа. Если бы было задумано 2 положительных числа, то на доске было бы выписано не менее трёх положительных чисел. Значит, положительное число одно, и это число — наибольшее число в наборе, то есть 4. Наименьшее число в наборе -8 является суммой двух отрицательных задуманных чисел. Из отрицательных выписанных чисел только -5 и -3 дают в сумме -8. Значит, были задуманы числа -5, -3 и 4.

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

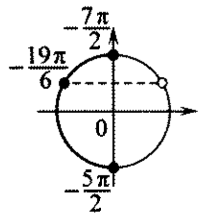
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\sin x\cos x = \cos x;\ \cos x\cdot\left(2\sin x - 1\right) = 0.$$

Значит, либо $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, либо $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $-\frac{7\pi}{2}$; $-\frac{19\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) $-\frac{7\pi}{2}$; $-\frac{19\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 20, а боковое ребро $AA_1 = 7$ Точка M принадлежит ребру A_1D_1 и делит его в отношении $2:3$, считая от вершины D_1. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и M

Решение.

Отрезок MN параллелен диагонали BD (точка N принадлежит ребру A_1B_1), следовательно, искомое сечение — трапеция $BDMN$ (рис. 1). Плоскость сечения пересекает нижнее основание по прямой BD, параллельной B_1D_1, значит, MN параллелен B_1D_1.

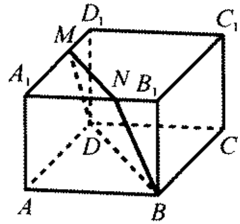


Рис. 1

Треугольники NA_1M и $B_1A_1D_1$ подобны, следовательно, $A_1N : A_1B_1 = A_1M : A_1D_1 = MN : B_1D_1 = 3:5$.

Значит, $BD = B_1D_1 = 20\sqrt{2}$, $MN = 12\sqrt{2}$.

В равных прямоугольных треугольниках BB_1N и DD_1M $DM = BN = \sqrt{BB_1^{\ 2} + B_1N^2} = \sqrt{113}$, значит, трапеция $BDMN$ равнобедренная.

Пусть NH — высота трапеции $BDMN$, проведённая к основанию BD (рис. 2), тогда:

$$BH = \frac{BD - MN}{2} = 4\sqrt{2};\ NH = \sqrt{BN^2 - BH^2} = 9;$$

$$S_{BDMN} = \frac{BD + MN}{2} \cdot NH = 144\sqrt{2}.$$

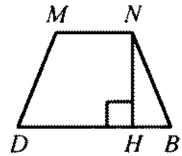


Рис. 2

Ответ: $144\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{4-x} \dfrac{(x-4)^8}{x+5} \ge 8, \\ \dfrac{x^2 - 3x - 5}{x-4} + \dfrac{x^2 - 6x + 3}{x-6} \le 2x + 1. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{4-x} \frac{(x-4)^8}{x+5} \ge 8;\ \log_{4-x}(4-x)^8 - \log_{4-x}(x+5) \ge 8;\ \log_{4-x}(x+5) \le 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 4 - x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+5) \le 0, \\ 0 < 4 - x < 1; \end{cases} \begin{cases} x + 5 \ge 1, \\ 3 < x < 4, \end{cases} \text{ откуда } 3 < x < 4.$$

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $\sin 2x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

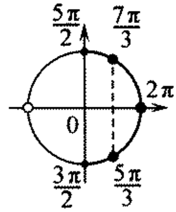
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\sin x\cos x = \sin x;\ \sin x\cdot(2\cos x - 1) = 0.$$

Значит, либо $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, либо $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $\frac{5\pi}{3}$; 2π; $\frac{7\pi}{3}$.

Ответ: а) πk, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3}$; 2π; $\frac{7\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 22, а боковое ребро $AA_1 = 7$ Точка K принадлежит ребру B_1C_1 и делит его в отношении $6:5$, считая от вершины B_1. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и K.

Решение.

Отрезок KL параллелен диагонали BD (точка L принадлежит ребру C_1D_1), следовательно, искомое сечение — трапеция $BDLK$ (рис. 1). Плоскость сечения пересекает нижнее основание по прямой BD, параллельной B_1D_1, значит, KL параллелен B_1D_1.

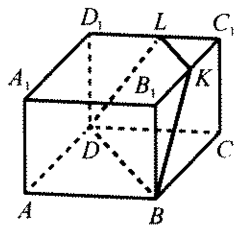


Рис. 1

Треугольники LC_1K и $D_1C_1B_1$ подобны, следовательно, $C_1L : C_1D_1 = C_1K : C_1B_1 = KL : B_1D_1 = 5:11$.

Значит, $BD = B_1D_1 = 22\sqrt{2}$, $KL = 10\sqrt{2}$.

В равных прямоугольных треугольниках DD_1L и BB_1K $BK = DL = \sqrt{DD_1^{\,2} + D_1L^2} = \sqrt{193}$, значит, трапеция $BDLK$ равнобедренная.

Пусть LH — высота трапеции $BDLK$, проведённая к основанию BD (рис. 2), тогда:

$$DH = \frac{BD - KL}{2} = 6\sqrt{2};\ LH = \sqrt{DL^2 - DH^2} = 11;$$

$$S_{BDLK} = \frac{BD + KL}{2} \cdot LH = 176\sqrt{2}.$$

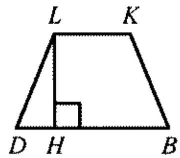


Рис. 2

Ответ: $176\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{8-x} \dfrac{(x-8)^{10}}{x-1} \geq 10, \\ \dfrac{x^2 - 9x + 15}{x-2} + \dfrac{x^2 - 7x + 4}{x-7} \leq 2x - 7. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{8-x} \frac{(x-8)^{10}}{x-1} \geq 10;\ \log_{8-x}(8-x)^{10} - \log_{8-x}(x-1) \geq 10;\ \log_{8-x}(x-1) \leq 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 8 - x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{8-x}(x-1) \leq 0, \\ 0 < 8 - x < 1; \end{cases} \begin{cases} x - 1 \geq 1, \\ 7 < x < 8, \end{cases} \text{ откуда } 7 < x < 8.$$

Второй случай: $8 - x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{8-x}(x-1) \leq 0, \\ 8 - x > 1; \end{cases} \begin{cases} 0 < x - 1 \leq 1, \\ x < 7, \end{cases} \text{ откуда } 1 < x \leq 2.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $1 < x \leq 2$; $7 < x < 8$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\frac{x^2-9x+15}{x-2}+\frac{x^2-7x+4}{x-7}\le 2x-7;$$

$$\frac{(x-7)(x-2)}{x-2}+\frac{1}{x-2}+\frac{x(x-7)}{x-7}+\frac{4}{x-7}\le 2x-7;$$

$$\frac{1}{x-2}+\frac{4}{x-7}\le 0;\ \frac{x-3}{(x-2)(x-7)}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x<2$; $3\le x<7$

3. Решение исходной системы неравенств: $1<x<2$.

Ответ: $(1;2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 13 и 20 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом в точке C, AO_1 и BO_2 — параллельные радиусы этих окружностей, причём $\angle AO_1O_2=60°$. Найдите AB.

Решение.

Точки O_1, O_2 и C лежат на одной прямой.

Возможны два случая. Первый случай: точки A и B лежат по одну сторону от прямой O_1O_2 (рис. 1). Отрезок AM параллелен отрезку O_1O_2 (точка M принадлежит радиусу BO_2), следовательно, O_1O_2MA — параллелограмм: $AM=O_1O_2=33$, $O_1A=O_2M=13$, $\angle O_2MA=\angle AO_1O_2=60°$

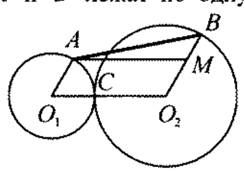


Рис. 1

В треугольнике AMB имеем $MB=7$, $AM=33$, $\angle AMB=120°$, откуда $AB=\sqrt{AM^2+MB^2-2\cdot AM\ \ MB\cdot\cos\angle AMB}=37$

Второй случай: точки A и B лежат по разные стороны от прямой O_1O_2 (рис. 2). Отрезок AM параллелен отрезку O_1O_2 (точка M лежит на продолжении радиуса BO_2 за точку O_2), следовательно, O_1O_2MA — параллелограмм: $AM=O_1O_2=33$, $O_1A=O_2M=13$, $\angle O_2MA=\angle AO_1O_2=60°$

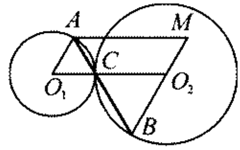


Рис. 2

В треугольнике AMB имеем $MB = 33$, $AM = 33$, $\angle AMB = 60°$, значит, треугольник AMB — правильный, откуда $AB = 33$.

Ответ: 33 или 37.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (2-a)^2 = |x-2+a| + |x-a+2|$$

имеет единственный корень.

Решение.

Если x_0 является корнем исходного уравнения, то и $-x_0$ является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень, только если $x_0 = -x_0$, то есть $x_0 = 0$. Подставим значение $x = 0$ в исходное уравнение:

$(2-a)^2 = 2|2-a|$; $|2-a|\cdot(|2-a|-2) = 0$, откуда либо $|2-a| = 0$; $a = 2$, либо $|2-a| = 2$; $a = 0$ или $a = 4$.

При $a = 2$ исходное уравнение принимает вид: $x^2 = 2|x|$. Корнями этого уравнения являются числа -2; 0 и 2, то есть исходное уравнение имеет более одного корня.

При $a = 0$ и при $a = 4$ уравнение принимает вид: $x^2 + 4 = |x-2| + |x+2|$.

При $x < -2$ это уравнение сводится к уравнению $x^2 + 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

При $-2 \le x \le 2$ получаем уравнение $x^2 = 0$, которое имеет единственный корень.

При $x > 2$ получаем уравнение $x^2 - 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

При $a = 0$ и при $a = 4$ исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: 0; 4.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены оба значения a, но в ответ включено не более одного постороннего значения a	3
Обоснованно получено одно из значений a	2
Получен один из следующих результатов: — задача верно сведена к исследованию квадратных уравнений, полученных после раскрытия модулей; — есть утверждение о симметрии корней исходного уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор -6, -4, -3, -2, -1, 1, 3. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 6 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Решение.

а) Если было задумано 4 числа или более, то на доске должно быть записано не менее 15 чисел. Если было задумано 2 числа или меньше, то на доске должно быть записано не более 3 чисел. Значит, было задумано 3 числа. Если бы было задумано 2 положительных числа, то на доске было бы выписано не менее трёх положительных чисел. Значит, положительное число одно, и это число — наибольшее число в наборе, то есть 3. Наименьшее число в наборе -6 является суммой двух отрицательных задуманных чисел. Из отрицательных выписанных чисел только -4 и -2 дают в сумме -6. Значит, были задуманы числа -4, -2 и 3.

б) Рассмотрим различные задуманные числа, среди которых нет нуля. Пусть для этих чисел в наборе на доске оказалось ровно k нулей. Если добавить к задуманным числам нуль, то на доске окажется ровно $2k+1$ нулей: k нулей, получающихся как суммы ненулевых задуманных чисел, k нулей, получающихся как суммы ненулевых задуманных чисел и задуманного нуля, и задуманный нуль. Таким образом, если среди задуманных чисел есть нуль, то в наборе на доске окажется нечётное количество нулей.

Если на доске выписано ровно 6 нулей, то среди задуманных чисел нет нуля. Пусть задумано пять или меньше ненулевых чисел. Нуль получается тогда, когда сумма некоторого количества положительных чисел равна по модулю сумме некоторого количества отрицательных чисел. Одно задуманное число даёт одну сумму; два различных задуманных числа одного знака дают три различные суммы; три различных задуманных числа дают семь сумм, среди которых не более двух (задуманное число, наибольшее по модулю, и сумма двух других задуманных чисел) совпадают; четыре различных задуманных числа дают 15 сумм, среди которых не может быть трёх одинаковых. Значит, среди сумм положительных и отрицательных чисел совпадают по модулю не более четырёх. Таким образом, если было задумано не более пяти различных ненулевых чисел, то на доске окажется не более четырёх нулей.

Если были задуманы числа -5; -2; -1; 1; 2; 3, то на доске окажется ровно шесть нулей. Значит, наименьшее количество задуманных чисел — 6.

в) Нет, не всегда. Например, для задуманных чисел -3, 1, 2 и -2, -1, 3 на доске будет выписан один и тот же набор -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.

Ответ: а) -4, -2, 3; б) 6; в) нет.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — оценка количества задуманных чисел в п. *а*; — пример в п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованное решение п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены оба значения a, но в ответ включено не более одного постороннего значения a	3
Обоснованно получено одно из значений a	2
Получен один из следующих результатов: — задача верно сведена к исследованию квадратных уравнений, полученных после раскрытия модулей; — есть утверждение о симметрии корней исходного уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

С6 Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор -9, -6, -4, -3, -1, 2, 5. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 5 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Решение.

а) Если было задумано 4 числа или более, то на доске должно быть записано не менее 15 чисел. Если было задумано 2 числа или меньше, то на доске должно быть записано не более 3 чисел. Значит, было задумано 3 числа. Если бы было задумано 2 положительных числа, то на доске было бы выписано не менее трёх положительных чисел. Значит, положительное число одно, и это число — наибольшее число в наборе, то есть 5. Наименьшее число в наборе -9 является суммой двух отрицательных задуманных чисел. Из отрицательных выписанных чисел только -6 и -3 дают в сумме -9. Значит, были задуманы числа -6, -3 и 5.

б) Рассмотрим различные задуманные числа, среди которых нет нуля. Пусть для этих чисел в наборе на доске оказалось ровно k нулей. Если добавить к задуманным числам нуль, то на доске окажется ровно $2k+1$ нулей: k нулей, получающихся как суммы ненулевых задуманных чисел, k нулей, получающихся как суммы ненулевых задуманных чисел и задуманного нуля, и задуманный нуль. Таким образом, если среди задуманных чисел есть нуль, то в наборе на доске окажется нечётное количество нулей.

Пусть задумано четыре или меньше ненулевых числа. Нуль получается тогда, когда сумма некоторого количества положительных чисел равна по модулю сумме некоторого количества отрицательных чисел. Одно задуманное число даёт одну сумму; два различных задуманных числа одного знака дают три различные суммы; три различных задуманных числа дают семь сумм, среди которых не более двух (задуманное число, наибольшее по модулю, и сумма двух других задуманных чисел) совпадают. Значит, среди сумм положительных и отрицательных чисел совпадают по модулю не более трёх. Таким образом, если было задумано не более четырёх различных ненулевых чисел, то на доске окажется не более трёх нулей.

Аналогично, если было задумано не более трёх различных ненулевых чисел, то на доске окажется не более одного нуля. Значит, если было задумано не более четырёх различных чисел, среди которых есть нуль, то на доске окажется не более трёх нулей.

Если были задуманы числа -3; 0; 1; 2; 3, то на доске окажется ровно пять нулей. Значит, наименьшее количество задуманных чисел — 5.

в) Нет, не всегда. Например, для задуманных чисел -3, 1, 2 и -2, -1, 3 на доске будет выписан один и тот же набор -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.

Ответ: а) -6, -3, 5; б) 5; в) нет.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — оценка количества задуманных чисел в п. *а*; — пример в п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованное решение п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4